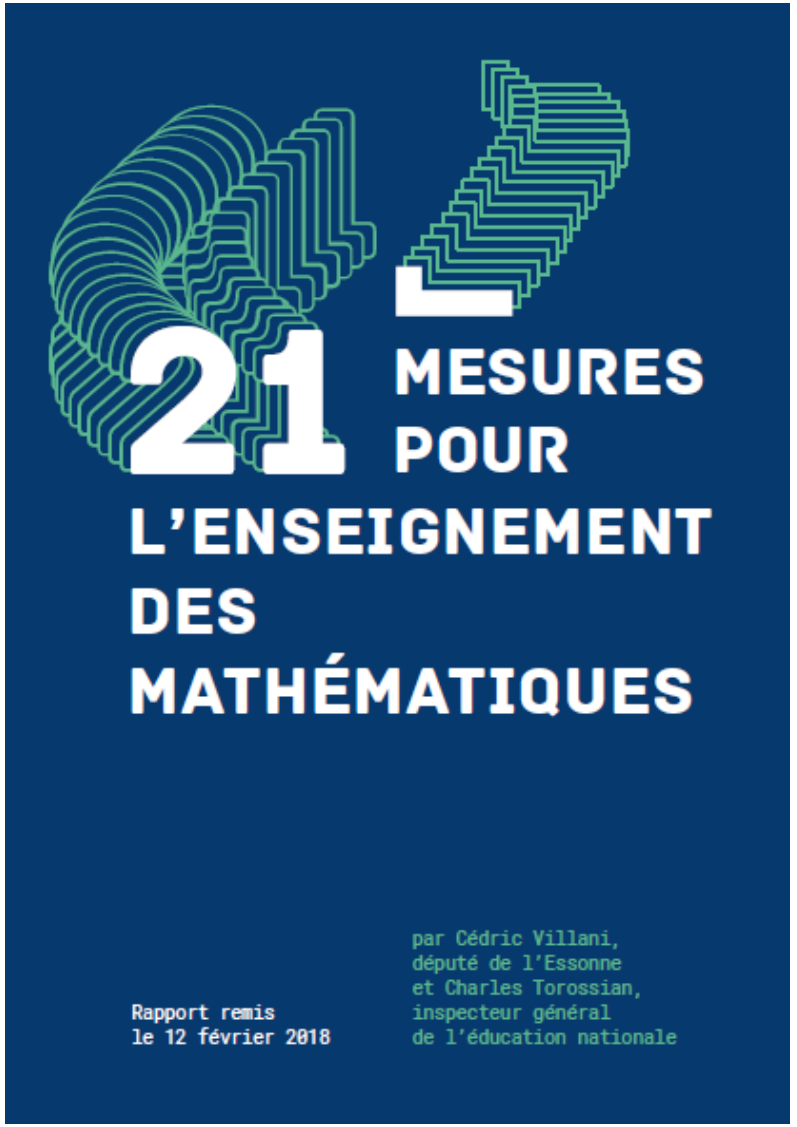
Animation pédagogique

Mathématiques Cycle 2

Résolution de problèmes

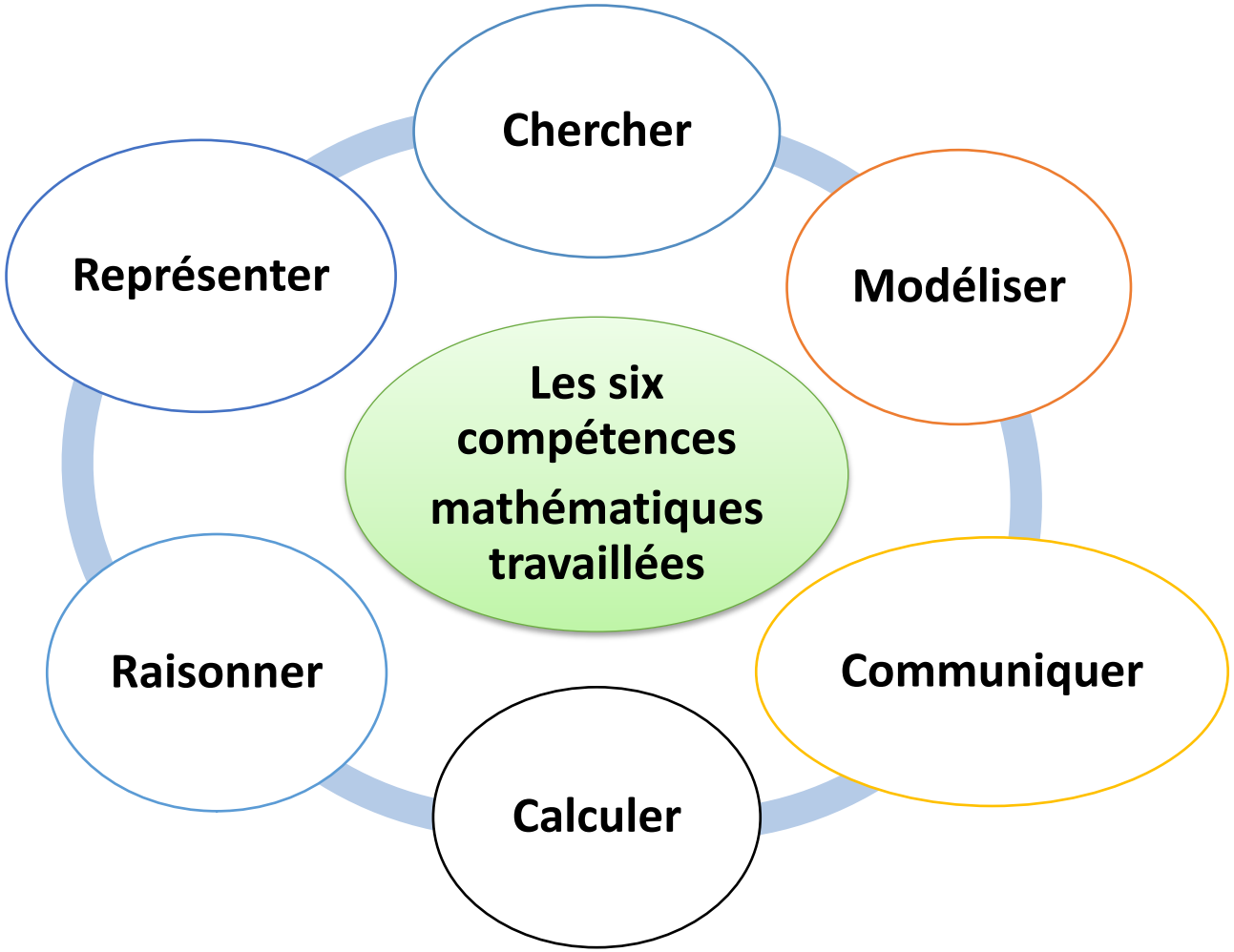
Mercredi 6 février 2019

Un plan Mathématiques



Manipuler –Verbaliser - Abstraire

Les compétences essentielles



Deux notes de service (avril 2018)

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Accueil > Le Bulletin officiel > Enseignement supérieur et recherche > spécial n°3 du 5 avril 2018

education.gouv.fr POUR L'ÉCOLE DE LA CONFIANCE

spécial n°3
du 26 avril
2018

Enseignement du calcul : un enjeu majeur pour la maîtrise des principaux éléments de mathématiques à l'école primaire

NOR : MENE1809042N
note de service n° 2018-051 du 25-4-2018
MEN - DGESCO A1

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Accueil > Le Bulletin officiel > Enseignement supérieur et recherche > spécial n°3 du 5 avril 2018

education.gouv.fr POUR L'ÉCOLE DE LA CONFIANCE

spécial n°3
du 26 avril
2018

La résolution de problèmes à l'école élémentaire

NOR : MENE1809043N
note de service n° 2018-052 du 25-4-2018
MEN - DGESCO A1

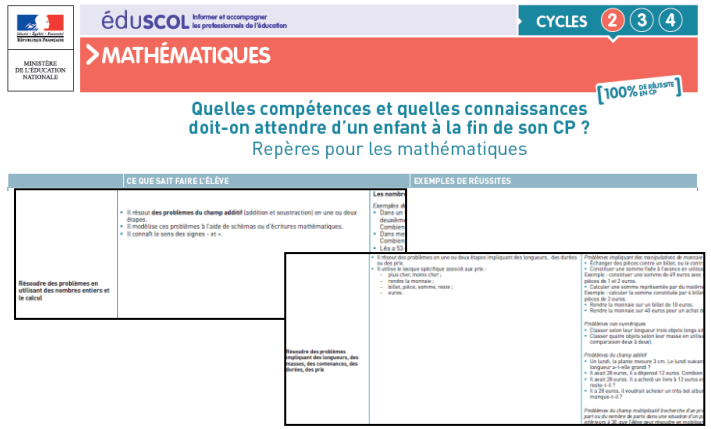
LES PROGRAMMES - Arrêté du 17-7-2018 - J.O. du 21-7-2018
(parution au BOEN n°30 du 26 juillet 2018)

Extraits p.22

Cycle 2

Au cycle 2, la résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique des élèves, développant leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer. Les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements. Ils peuvent être issus de situations de vie de classe ou de situations rencontrées dans d'autres enseignements, notamment « Questionner le monde », ce qui contribue à renforcer le lien entre les mathématiques et les autres disciplines. Ils ont le plus souvent possible un caractère ludique. On veillera aussi à proposer aux élèves dès le CP des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas de simples problèmes d'application à une ou plusieurs opérations mais nécessitent des recherches avec tâtonnements.

L'étude des quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division) commence dès le début du cycle à partir de problèmes qui contribuent à leur donner du sens, en particulier des problèmes portant sur des grandeurs ou sur leurs mesures. La pratique quotidienne du calcul mental conforte la maîtrise des nombres et des opérations et permet l'acquisition d'automatismes procéduraux et la mémorisation progressive de résultats comme ceux des compléments à 10, des tables d'addition et de multiplication.


éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

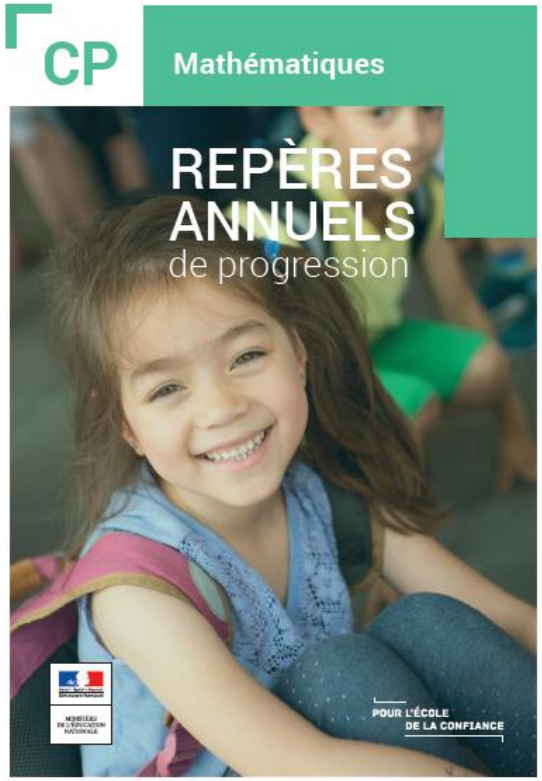
MATHÉMATIQUES

100% DE RÉUSSITE EN CP

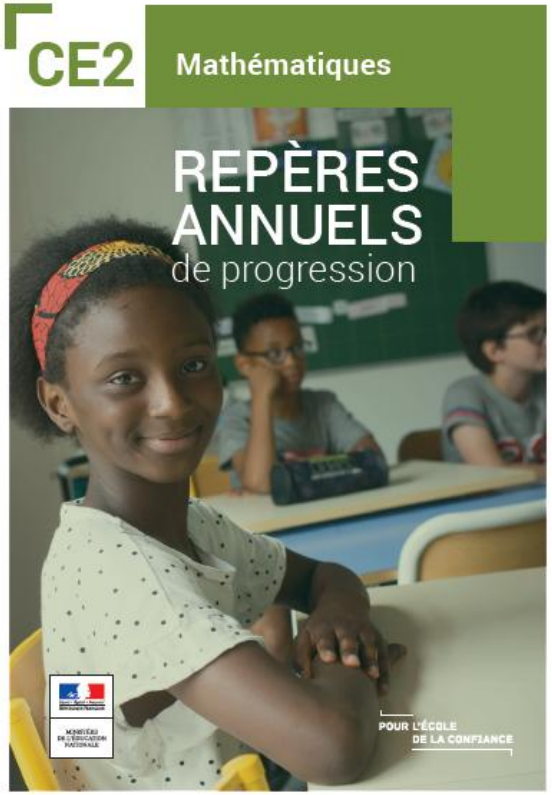
Quelles compétences et quelles connaissances doit-on attendre d'un enfant à la fin de son CP ?

Repères pour les mathématiques

	CE QUE SAIT FAIRE L'ÉLÈVE	EXEMPLES DE RÉUSSITES
Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul	• Il résout des problèmes du champ additif (addition et soustraction) en une ou deux étapes. • Il modélise ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques. • Il connaît le sens des signes + et −.	Les nombre Exemples d • Dans un deuxième Combien • Dans ma Combien • Léa a 5
Résoudre des problèmes impliquant des longueurs, des masses, des contenances, des durées, des prix	• Il résout des problèmes en une ou deux étapes impliquant des longueurs, des durées ou des prix. • Il utilise le lexique spécifique associé aux prix : – plus cher, moins cher ; – rendre la monnaie ; – billet, pièce, somme, reste ; – euros.	• Problème impliquant des manipulations de monnaie • Échanger des pièces contre un billet, ou le contr • Constituer une somme finie à l'aurore en utilisa Exemple : constituer une somme de 49 euros avec • Payer 49 euros. • Calculer une somme représentée par du matériel Exemple : calculer la somme constituée par 6 billet pièces de 2 euros. • Rendre la monnaie sur un billet de 10 euros. • Rendre la monnaie sur 40 euros pour un achat d Problèmes non numériques • Classer selon leur longueur trois objets longs a • Classer quatre objets selon leur masse en utilisa comparaison deux à deux). Problèmes du champ additif • Un lundi, la plante mesure 3 cm. Le lundi suivan longueur a-t-elle grandi ? • Il avait 28 euros, il a dépensé 12 euros. Combien • Il avait 28 euros. Il a acheté un livre à 12 euros e euros ? • Il a 28 euros, il voudrait acheter un très bel albu manque-t-il ?



Des repères annuels de progression



Des évaluations nationales et des ressources

Nombres et calcul
Utiliser les nombres

COMPÉTENCE VISÉE
Être capable d'utiliser le nombre pour exprimer une position.
Activité : Repérer une position sur une ligne numérique pour entourer le nombre à placer sur cette position parmi 6 propositions.

POURQUOI CE TEST ?
L'idée que les nombres forment une ligne orientée de la gauche vers la droite est l'un des concepts les plus fondamentaux et les plus utiles en mathématiques. Chez l'adulte, le nombre et l'espace sont automatiquement associés dans les mêmes régions du cerveau, et le concept de « ligne numérique » facilite la compréhension de l'arithmétique : additionner, c'est se déplacer d'un certain nombre d'unités vers la droite, etc. La correspondance nombre-espace

Nombres et calculs
Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers

Nombres et calculs
Utiliser les nombres

Nombres et calculs
Calculer (en ligne) avec des nombres entiers

COMPÉTENCE VISÉE
Être capable de calculer en ligne avec des nombres entiers.
Activité : calculer en ligne des additions ou des soustractions de deux nombres entiers puis

Nombres et calculs
Nommer, lire, écrire, représenter des

Nombres et calculs
Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul

COMPÉTENCE VISÉE
Être capable de résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul.

Des temps de formation
pour tous les enseignants
qui s'inscrivent dans la continuité du Plan national et académique Mathématiques.

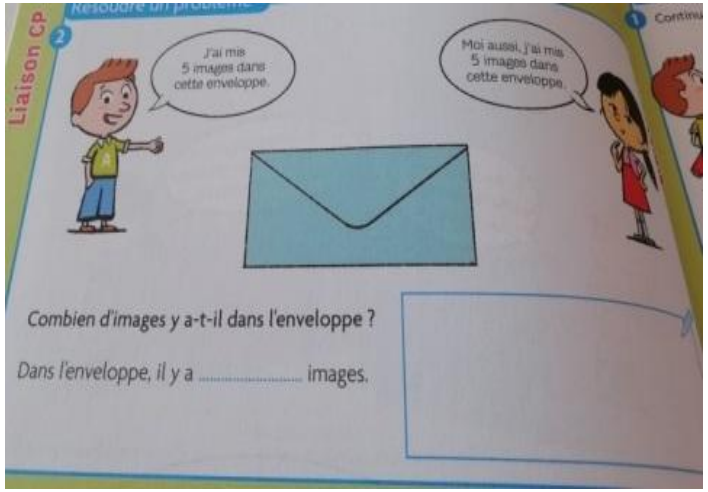
Temps 1
Une animation pédagogique en présentiel :
Nombres et calculs / Résolution de problèmes
Mercredi 6 février 2019

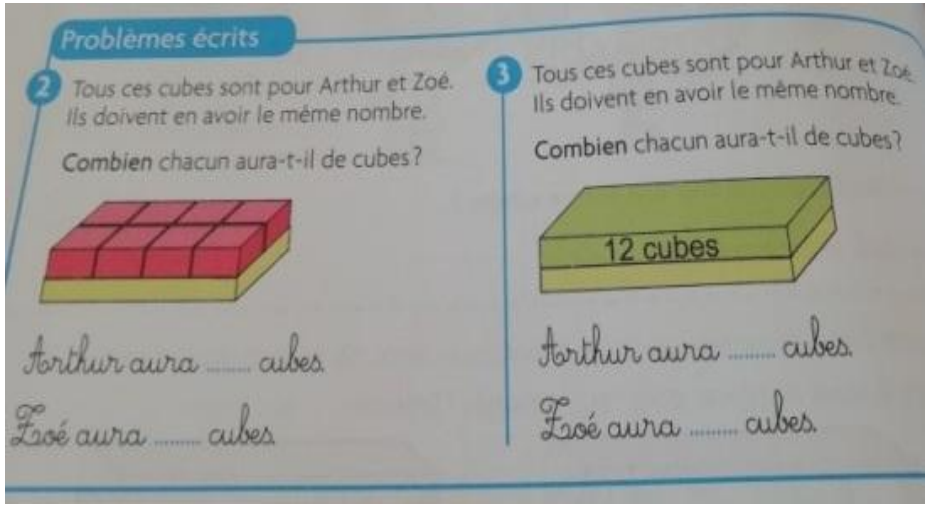
Temps 2
In-situ / Espace M@gistère

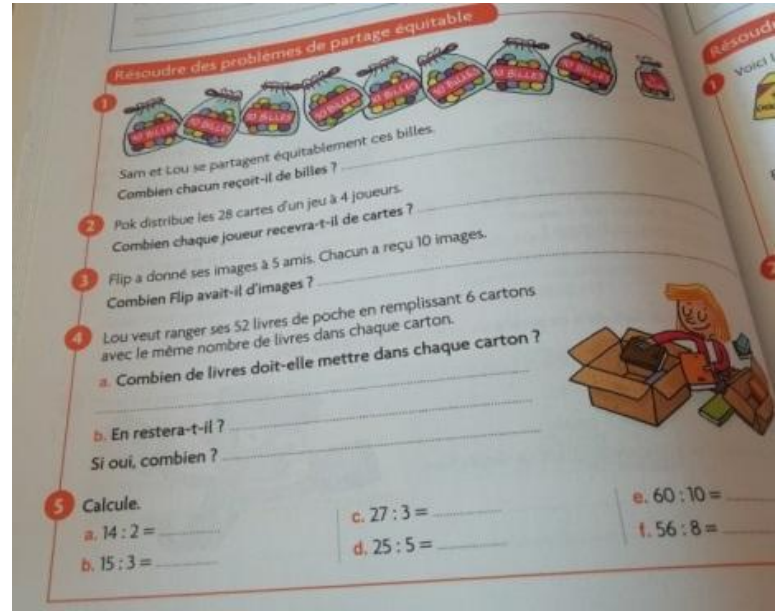
Temps 3
Calcul mental et numérique
mercredi 3 avril 2019

La résolution de problèmes

Qu’est-ce que résoudre un problème ?







Qu’est-ce qu’un problème ?

Jean BRUN, 1991, docteur en didactique des mathématiques

« Un problème est généralement défini comme une situation initiale, avec un but à atteindre, demandant au sujet une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but.

Il n'y a problème, dans un rapport sujet / situation, que si la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire.

C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple » (ERMEL CM1)

Dominique VALENTIN, août 1997, professeur de mathématiques en IUFM

C'est une situation initiale avec un but à atteindre demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but.

Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation où :

la solution n'est pas disponible d'emblée ;

mais elle est possible à construire ;

Gérard VERGNAUD, 1986, spécialiste en psychologie cognitive et didactique

« Par problème, il faut entendre, dans le sens large que lui donne le psychologue, toute structuration dans laquelle il faut découvrir des relations, développer des activités d'exploration, d'hypothèses et de vérification pour produire une solution »

Les fonctions des problèmes

Problèmes pour apprendre, centrés sur une notion			***Problèmes pour chercher, centrés sur la démarche***
La situation-problème	***Les problèmes d'application ou de réinvestissement***	***Les problèmes complexes***	***Les problèmes ouverts***
Ce sont des problèmes pour apprendre, c'est-à-dire pour permettre aux élèves de construire une notion nouvelle.	*Ils servent essentiellement à consolider des connaissances, des savoir-faire.*	*Ils offrent l'occasion de mobiliser plusieurs connaissances mathématiques . Ces problèmes demandent aux élèves d'organiser une démarche raisonnée, de poser des étapes intermédiaires, de programmer des calculs, des constructions.*	*Un des objectifs est le développement des capacités à chercher.*
⅄ L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème (l'obstacle ne doit pas être trop difficile) ⅄ Les connaissances de l'élève sont, en principe, insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème. ⅄ La situation-problème doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas. ⅄ La connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l'élève.	⅄ La notion en jeu est connue. Le problème d'application donne l'occasion de l'utiliser. ⅄ On attend de l'élève une procédure experte. ⅄ Ce type de problèmes permet d'évaluer des connaissances et des procédures de base dans des contextes connus.	⅄ Ce type de problèmes permet d'évaluer la capacité à mobiliser des connaissances et des procédures de base dans un contexte nouveau. (évaluation par compétences)	⅄ L'énoncé est court. ⅄ L'énoncé propose aux élèves une situation familière afin que les élèves puissent facilement cerner la situation et se lancer dans des essais, émettre des hypothèses, s'engager dans des procédures de résolution personnelle etc. ⅄ L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire). ⅄ Il ne relève pas d'application de connaissances directes. ⅄ Il ne débouche pas directement sur un apprentissage nouveau. ⅄ La démarche de résolution est personnelle

Des tâches à questionner

❖ Des protocoles fantaisistes pourtant souvent proposés

Les étapes pour résoudre un problème

Extrait de *Myriade 6eme* 2009, 2014 et 2016 p.241

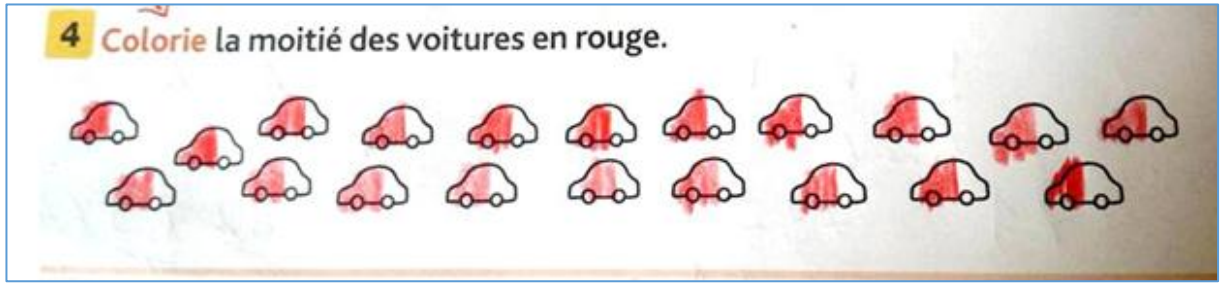
❖ La compréhension de l’énoncé: les mots inducteurs

- Deux classes A et B. Dans la classe A il y a 19 élèves, ce qui fait 7 élèves de moins que dans la classe B.

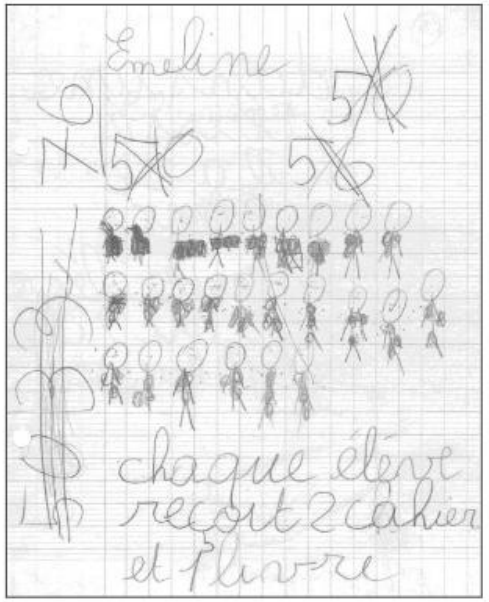
  Combien d’élèves dans la classe B ?

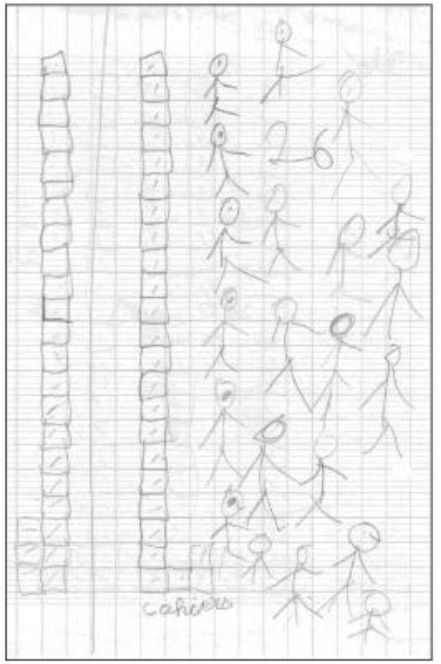
- Aujourd’hui Marie a a 20 marrons. Elle a 12 marrons de plus qu’hier. Combien en avait elle hier?

❖ Des productions d'élèves



La rentrée.
C'est la rentrée. Il y a 25 élèves dans une classe. Le maître donne des cahiers et des livres.
Chaque élève reçoit 2 cahiers et 1 livre.
Combien le maître donne-t-il de cahiers? Combien donne-t-il de livres?





Enseigner
la résolution de problèmes

Voici des problèmes:

☞ Quelles sont les caractéristiques des problèmes ?

☞ Quelles sont les compétences mobilisées ?

☞ Quelles difficultés peuvent rencontrer les élèves?

☞ Quel étayage peut-on proposer ?

<u>Les massifs de tulipes:</u> calcule le nombre de tulipes dans un massif :

a) un massif de fleurs, formé de 60 tulipes rouges et 15 tulipes jaunes ;

b) un massif de 60 rangées de 15 tulipes ;

c) un massif de 60 fleurs, formé de tulipes et de 15 jonquilles ;

d) 60 tulipes disposées en 15 massifs réguliers.

Il avait 28 euros. Il a acheté un livre à 12 euros et une trousse à 5 euros. Combien lui reste-t-il ?

Matéo a 20 billes.
Sara en a 10 de plus que lui.
Combien les deux enfants ont-ils de billes en tout ?

Kevin avait 27 jetons ; il en a donné 12 à Agathe.

Combien de jetons a Kevin maintenant ?

Dans la salle de cantine de l'école il y a 6 tables pour les élèves.

À chaque table, 10 élèves peuvent s'asseoir pour manger.

Dans cette école, il y a 27 filles et 36 garçons qui mangent à la cantine.

Est-ce que tous les élèves peuvent manger en même temps dans la salle de la cantine ?

Les châtaignes de Charles

Charles a récolté 108 kg de châtaignes. Il les met dans trois paniers, un petit, un moyen, un grand.

Les châtaignes du panier moyen pèsent le double de celles du petit panier. Les châtaignes du grand panier pèsent le double de celles du panier moyen.

Après avoir rempli ces trois paniers, il lui reste quelques kg de châtaignes, exactement la moitié du poids des châtaignes du grand panier.

Combien de kg de châtaignes Charles a –t-il mis dans chaque panier ? Combien de kg lui reste-il ?

Deux processus cognitifs en jeu.

- **Processus représentationnels**

Le sujet construit une représentation cognitive (mentale) du problème. Le problème peut lui évoquer un problème autre, déjà résolu.

- **Processus opératoires**

Le sujet déclenche un traitement :

* ce traitement peut être inféré de sa mémoire s'il a reconnu d'une certaine façon le problème : *nous et les massifs de fleurs*

* s'il ne reconnait pas le problème , il lui faut construire une nouvelle stratégie : le *problème des châtaignes en cycle 3*

Jean Julo 2002 *Grand N* n°69

Attention : ces processus sont simultanés, ils interagissent ! C'est l'interaction de ces processus qui font réussir la résolution.

La représentation d'un problème, que se construit un sujet, oscille entre deux « possibilités extrêmes »

1. <u>Ce problème ressemble à un problème connu</u>

→traitement inféré de mémoire : *les massifs de fleurs*

2. <u>Ce problème ne rappelle rien au sujet</u>

→construction d'une stratégie (nouvelle) : *les châtaignes pour des élèves de CM*

Conséquences sur les enjeux de l'enseignement des problèmes

1. Enrichir la mémoire des élèves sur les problèmes :

- Pour les élèves : donner des occasions aux élèves de résoudre des problèmes et de **les réussir seuls**

- Pour les enseignants /pour les programmes : définir des types de problèmes dont on attend qu'ils soient **résolus « automatiquement** » par les élèves Mais quels problèmes ?

2. Permettre l'invention de procédures.

Des problèmes à mémoriser :

→ les problèmes « basiques » : ceux qui sont les « éléments simples » des autres problèmes, relativement à un champ notionnel.

Par exemple en arithmétique les problèmes liés à une opération : 2 données trouver la 3ème (2n+1 données pour la proportionnalité), ***sans information superflue , avec syntaxe simple*** *« one step problems »*

Il en existe assez peu de ce type dans les manuels, mais surtout leur organisation n'est pas pensée.

→Outils théoriques qui les organisent : Vergnaud (1985, 1997)

structures additives (champ conceptuel addition-soustraction) **ET** structures multiplicatives (champ conceptuel multiplication-division -proportionnalité)

un outil crucial pour les problèmes arithmétiques

Vers une typologie des problèmes arithmétiques

- Problèmes « basiques » (d'un savoir, d'un concept)

Enjeu élève : les mémoriser

- Problèmes « complexes »

Enjeu élève : construire des sous-problèmes basiques calculables en connectant des informations et qualifiant les résultats

- Problèmes « a-typiques »

Enjeu élève : inventivité stratégique et flexibilité de raisonnement , persévérance et confiance en soi

Exemples de problèmes basiques.. ….*multiplicatifs*

- ✓ **Pas de donnée superflue**
- ✓ **Une syntaxe facile**
- ✓ **Un contexte facile à comprendre (a priori)**

- Un piste d'athlétisme mesure 400 m. Paul fait 5 tours de piste. Quelle distance a-t-il parcourue ? *Basique CE2*
- Dans cette salle il y a 18 rangées de 25 fauteuils. Combien de personnes peuvent s'asseoir sur un fauteuil ? *Basique CE2*
- Pierre met huit min pour aller de chez lui à l'école. Zélie met quatre fois plus de temps. Combien de temps met Zélie ? *Basique CE2*
- Dans cette salle, 400 places en 25 rangées régulières. Combien de places par rangée ? *Basique CM*
- Alice met douze min pour aller de chez elle à l'école, trois fois moins de temps que Ryan. Combien de temps met Ryan ? *Basique CM*

Exemples de problèmes « presque » basiques …

✓ *Il est nécessaire de faire des « adaptations » (Robert 2008) pour retrouver le problème automatisé.*

- Une place de spectacle scolaire coûte 2 €. Combien la classe doit payer pour que la classe de CE2 de 30 élèves puisse aller voir le spectacle ? (*Euro Maths* Hatier CE2 2010) 36
- Pierre et Anne ont ensemble 9 pommes. Pierre a 3 pommes.
- Combien de pommes a Anne ? *La réponse donnée en CP est souvent 9*
- Pierre et Anne ont ensemble 9 pommes. 3 des pommes appartiennent à Pierre, les autres appartiennent à Anne. Combien de pommes a Anne ?

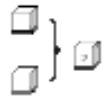
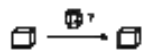
Le nombre de réponses correctes augmente de façon significative

Typologie Vergnaud(1997; 2001)

connue mais à mieux utiliser :

L'enseignant qui sait les catégoriser pourrait prévoir la hiérarchie des difficultés.

Typologie des problèmes additifs et soustractifs (classification de Gérard Vergnaud)

				Exemples
Composition de deux états On considère les situations qui portent sur 3 grandeurs où 2 d'entre elles se composent pour donner la 3ème.	**Recherche du composé**		Problèmes ternaires	***A midi, j'ai bu 2 verres d'eau et 1 verre de jus d'orange. Combien de verres ai-je bu en tout ?***
	Recherche d'1 partie			***Dans notre cour, nous avons 5 bancs. Pendant la récréation, 3 bancs sont occupés par des enfants. Combien de bancs sont vides?***
Transformation d'un état Un état initial subit une transformation pour aboutir à un état final.	**Recherche de l'état final**		Problèmes ternaires	***Tu avais 2 petites voitures. Je t'en donne encore une. Combien en as-tu maintenant?***
	Recherche de la transformation			***Pose 5 cubes sur la table. Que dois-tu faire pour en avoir 7?***
	Recherche de l'état initial			***J'ajoute 3 bonbons dans la boîte. Maintenant j'en ai 5. Combien la boîte contenait-elle déjà de bonbons?***
Comparaison d'états **On compare 2 états. Dans ce type de problème, on trouve presque toujours les expressions « de plus/de moins »**	**Recherche de l'un des états**		Problèmes ternaires	***Alexis a 3 ans. Il a 1 an de plus (ou Quel est l'âge de sa sœur?***
	Recherche de la comparaison			***Sur une assiette, il y a 2 gâteaux. S Combien y a-t-il de gâteaux de plu***

Banque de problèmes selon la typologie de Vergnaud

Problèmes additifs/soustractifs :

Composition de deux états

Recherche du composé :

Problème n°1 : Emma a fait un collier avec 10 perles bleues et 7 perles rouges. Combien y a-t-il de perles sur le collier d'Emma ?
Problème n°2 : Dans un compotier, il y a 4 bananes, 10 oranges et 10 pommes.

CONCLUSION partielle

•Les problèmes « basiques » d'un concept sont des connaissances de base. Il est urgent de restaurer un enseignement de ces problèmes et donc de faire fréquenter (et réussir) par les élèves une grande variété de tels problèmes, puis d'analyser avec les élèves leurs ressemblances

•Les problèmes « complexes » sont **des composés** de problèmes basiques. Ils nécessitent de savoir résoudre les problèmes basiques sous-jacents et des connaissances supplémentaires : connecter les informations pour construire le (les) sous –problème basique calculable, savoir qualifier…

•Les problèmes « a-typiques » visent l'inventivité stratégique et la prise de risque ……

UN ENJEU FORT pour les enseignants : analyser les problèmes

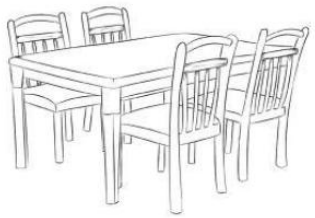
Des pratiques à renforcer

- **Travailler le lien avec la maîtrise de la langue et notamment les problèmes de vocabulaire**

Sens courant	Sens mathématique
Le sommet de la montagne	Le sommet du carré
Le centre commercial	Le centre du cercle
Le produit à vaisselle	Le produit de 2 nombres
Notre figure (visage)	Une figure géométrique
Le tableau de la classe	Le tableau de nombres
L'opération à l'hôpital	L'opération à calculer
Se couper avec un couteau	Deux droites qui se coupent
La différence de taille	La différence comme résultat de la soustraction
L'écriture dans le cahier	Les différentes écritures des nombres
Un problème de machine à laver	Un problème mathématique
Le disque qu'on écoute	Le disque = surface
Un objet solide	Un solide à construire
Une retenue d'eau	La retenue de l'addition

Proposer une phrase et faire trouver à quel sens on fait référence en choisissant la bonne illustration :

Exemple : J'apprends ma table de quatre.



4 x 0	0
4 x 1	4
4 x 2	8
4 x 3	12
4 x 4	16
4 x 5	20
4 x 6	24
4 x 7	28
4 x 8	32
4 x 9	36
4 x 10	40

Exemple : chaque/chacun(e)/ par / de :

Les enfants ont 3 bonbons **chacun.**

Chaque enfant a 3 bonbons.

3 bonbons **par** enfant.

Des paquets **de** 3 bonbons.

- **Anticiper les problèmes de compréhension de l'énoncé :** faire théâtraliser, faire raconter « l'histoire » (sans les nombres ?), schématiser, réfléchir aux énoncés proposés en lien avec le quotidien des élèves

- **Proposer de manipuler pour comprendre l'énoncé**. Mais attention la manipulation ne doit pas être présente tout le temps car les élèves n'utiliseront que le comptage.

- **Laisser un temps suffisamment long de recherche.** Un temps de recherche en individuel est indispensable pour que chaque élève s'approprie le problème.

- **Le temps de mise en commun paraît indispensable.** Il permet la présentation par les pairs de différentes procédures et l'analyse de ces procédures.

- **Trouver la question**

Trouve et écris la question qui convient puis résous le problème.

Jean doit livrer 450 bouteilles de vin à un client. Il en a déjà transporté 184.

Un séisme a commencé à 6h 17 min 36 s. Une première secousse a duré 40 secondes. Une deuxième secousse a commencé à 6h 23 min 7s et s'est terminée à 6h 24 min 18 s. Ce fut la fin du séisme.

La maison de M. Lapoisse s'est partiellement effondrée. Son voisin a appelé les secours qui sont arrivés en 7 mn : à 6h 33, ils étaient sur place.

Heureusement, personne n'était dans la maison quand elle s'est effondrée.

- **Faire créer des problèmes (avec des contraintes)**

“Inventer un problème d’addition dont la solution est 5+3=8”

Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc…) a 5 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc…).
Il/Elle en reçoit (gagne, etc…) 3 à (pendant, etc…).
COMBIEN EN A T-IL EN TOUT ?

Additionner, c’est ajouter.
(i) Deux parties sont données, qui forment un tout. La question porte sur la valeur de ce tout.
(ii) Un état initial est donné, ainsi qu’un accroissement . La question porte sur l’état résultant.
L’addition
Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

“Inventer un problème d’addition dont la solution est 5+3=8 et dans lequel on ne gagne rien, on ne fait que perdre”

Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5.

Combien de billes avait-il avant la récréation ?

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

Quelles conséquences ?

Paul avait 3 billes. Il en gagne 5 à la récréation. Combien a-t-il de billes maintenant ?
100% de réussite à 6 ans [Dans le domaine de validité de la connaissance intuitive]

Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes. Combien ont-ils de billes ensemble ?
100% de réussite à 6 ans [Dans le domaine de validité de la connaissance intuitive]

Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ?
28% de réussite à 6 ans [Hors du domaine de validité de la connaissance intuitive]

Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes de plus que Paul. Combien de billes Pierre a-t-il ?
17% de réussite à 6 ans [Hors du domaine de validité de la connaissance intuitive]

Paul a 3 billes. Paul a 5 billes de moins que Pierre. Combien Pierre a-t-il de billes ?
6% de réussite à 6 ans [Hors du domaine de validité de la connaissance intuitive]

“Inventer un problème de soustraction dont la solution est 8-3=5”

Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc…) a 8 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc…).

Il/Elle en donne (mange, perd, etc…) 3 à (pendant, etc…).

COMBIEN LUI EN RESTE-T-IL ?

Soustraire c’est perdre, retirer, enlever. Une totalité est donnée, dont une partie est retranchée. La question porte sur la partie subsistante.

Quasi totalité des CM1-CM2 ; étudiants Master Psycho; enseignants du primaire

La soustraction

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

“Inventer un problème de soustraction dont la solution est 8-3=5 et dans lequel on ne perd rien, on ne fait que gagner”

Paul a 3 billes. Il en gagne pendant la récréation et maintenant il en a 8.

Combien de billes a-t-il gagnées ?

Tableau 6.1 - Types de problèmes et proportions de réussite en fonction du niveau scolaire (d'après Riley, Greeno et Heller, ibid.).

TYPES DE PROBLEME	TAUX DE REUSSITE			
	Mat.	CP	CE1	CE2
Changement				
1- X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X?	.87	1.00	1.00	1.00
2- X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X?	1.00	1.00	1.00	1.00
3- X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X?	.61	.56	1.00	1.00
4- X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y?	.91	.78	1.00	1.00
5- X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien Y lui en a-t-il donné?	.09	.28	.80	.95
6- X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes?	.22	.39	.70	.80
Combinaison				
7- X a 3 billes. Y a 5 billes: Combien X et Y ont-ils de billes ensemble?	1.00	1.00	1.00	1.00
8- X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes?	.22	.39	.70	1.00
Comparaison				
9- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y?	.17	.28	.85	1.00
10- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X?	.04	.22	.75	1.00
11- X a 3 billes: Y a 5 billes de plus que X. Combien de billes a Y?	.13	.17	.80	1.00
12- X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien de billes a Y?	.17	.28	.90	.95
13- X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien de billes a Y?	.17	.11	.65	.75
14- X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y Combien de billes a Y?	.00	.06	.35	.75
Egalisation				
15- X a 3 billes. Y a 8 billes. Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y?	.	.	.	.
16- X a 8 billes. Y a 3 billes: Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y				

Paul a 8 billes. Il en perd 3 pendant la récréation. Combien lui en reste-t-il ?

Paul a 3 billes de moins que Mathieu. Mathieu a 8 billes. Combien de billes Paul a-t-il ?

Paul a 8 billes. Il en perd pendant la récréation. Il lui en reste 3. Combien de billes Paul a-t-il perdu ?

Paul avait des billes en allant à l'école. Il en gagne 3 pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes Paul avait-il avant la récréation ?

Paul a 3 billes. Mathieu a 8 billes. Combien de billes manque-t-il à Paul pour qu'il en ait autant que Mathieu ?

Paul a 3 billes. Mathieu a 8 billes. Combien Mathieu a-t-il de billes de plus que Paul ?

Paul a 3 billes. Il en gagne pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes a-t-il gagnées ?

TYPES DE PROBLEME

Changement

1- X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X?
2- X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X?
3- X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X?
4- X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y?
5- X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien Y lui en a-t-il donné?
6- X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes?

Combinaison

7- X a 3 billes. Y a 5 billes: Combien X et Y ont-ils de billes ensemble?
8- X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes?

Comparaison

9- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y?
10- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X?
11- X a 3 billes: Y a 5 billes de plus que X. Combien de billes a Y?
12- X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien de billes a Y?
13- X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien de billes a Y?
14- X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y Combien de billes a Y?

Egalisation

15- X a 3 billes. Y a 8 billes. Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y?
16- X a 8 billes. Y a 3 billes: Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y

Sur les 11 catégories de problèmes de soustraction que comporte cette typologie qui a émergé dans les années 1980, plus de 90% des propositions se concentrent sur la seule catégorie des recherches de reste dans une situation de retrait.

Cette analogie de substitution donne sens à la notion, mais elle induit une focalisation sur un seul type de situation. Elle est nécessaire mais limitante, car elle éclipse la diversité des situations de soustraction.

Vergnaud, 1982 ; Riley et al., 1983 ; Sander, 2018

Quelles conséquences ?

" Lors d'une course, 108 coureurs prennent le départ. Il y a beaucoup d'abandons : 85 coureurs seulement terminent la course. Combien de coureurs ont abandonné ? "

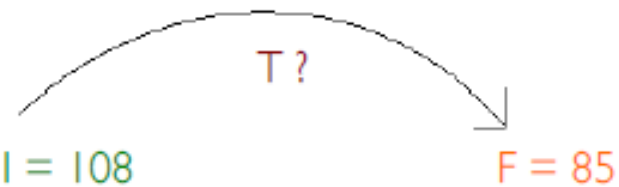
25% de réussites en début de CE2 ; DEPP 2014

Il est difficile d'envisager de soustraire 85 de 108 car 85 est la valeur du reste.

Etat initial : Les 108 coureurs

Transformation : Les coureurs qui abandonnent

Etat final : Les 85 coureurs qui terminent la course



Intervenir sur la conception de la soustraction ou sur la perception du problème.

DEPP, 2014 ; Sander & Richard, 2015

“Inventer un problème de multiplication”

“Définir l’opération mathématique de multiplication”

La quasi totalité des problèmes inventés décrit une addition réitérée : une réplication sommative.

Exemple : J’ai 3 paquets de 10 gâteaux. Combien cela fait-il de gâteaux en tout ?

La multiplication

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

“Inventer un problème de division avec *résultat* plus grand que la *valeur initiale ?*”

Elèves de 6ème et 5ème :

La division

1: « Impossible ! »

2: Possible, mais pas de problème proposé

3: Possible, mais valeurs numériques uniquement

4: Possible, mais justification erronée

5: Invente un problème inapproprié

6: Réussite

7: Pas de réponse

Une seule réussite sur 254 élèves !

Adultes universités :

74% échec

27% écrivent “ Impossible ”

23% construisent un problème incompatible avec la consigne

23% posent une opération (exemple : 4/0.2), mais sans énoncé

Les étapes de résolution d'un problème :

Mise en situation

- Mise en situation à partir d'objets concrets, d'un énoncé, d'une situation de vie de classe, d'un défi

Recherche

- Prise en compte de ce que savent les élèves
  - temps de recherche individuelle (les élèves s'appuient sur leurs connaissances préalables pour trouver des solutions, pour s'approprier le problème).
  - temps de recherche en groupe (Chaque élève présente aux autres élèves sa procédure de résolution et , sans obligatoirement aboutir à un choix)

Mise en commun

- Mise en commun des procédures
  - Présentation et débat autour des différentes procédures
  - L'enseignant questionne, incite à argumenter (valorisation des bonnes procédures et exploitation des erreurs)
  - La confrontation et l'argumentation des différentes procédures permettent la validation des propositions.
- Si la situation est un problème de recherche, la mise en commun permettra de mettre l'accent sur la richesse et la diversité des procédures employées (sans jugement sur les procédures utilisées, qu'elles soient justes ou non.
- A contrario, si la situation vise une notion ou une procédure, la mise en commun est le moment de l'institutionnalisation de ce savoir.

Synthèse

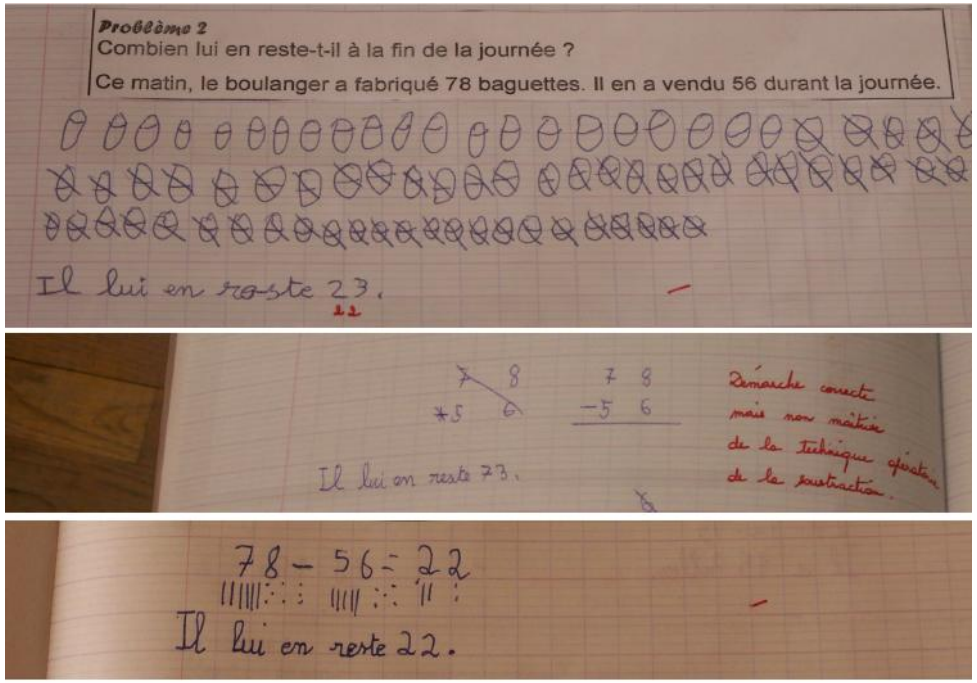
- L'enseignant aide les élèves à organiser et structurer les connaissances , les procédures intéressantes et les comportements essentiels qui ont été élaborés.

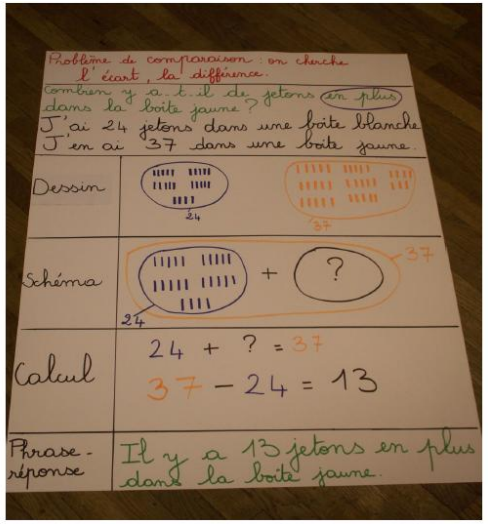
Exemple d'un travail

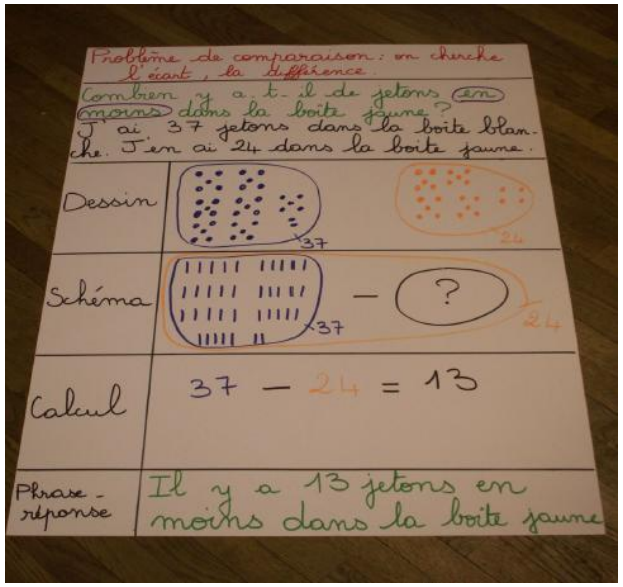
Les énoncés de problèmes rencontrés sont apparentés à un problème « générique ». On fait donc réinvestir des procédures éprouvées, associées à une catégorie de problèmes.

<u>Démarche utilisée</u> :

- Mise en situation : A partir d'une situation concrète puis d'un énoncé, compréhension de la situation (L'élève ne peut bâtir une représentation qu'à partir d'une manipulation)
- Temps de recherche individuel ET/OU en groupe

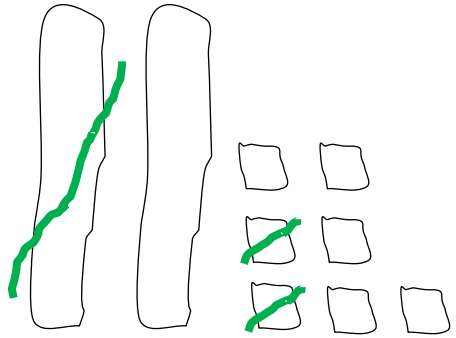




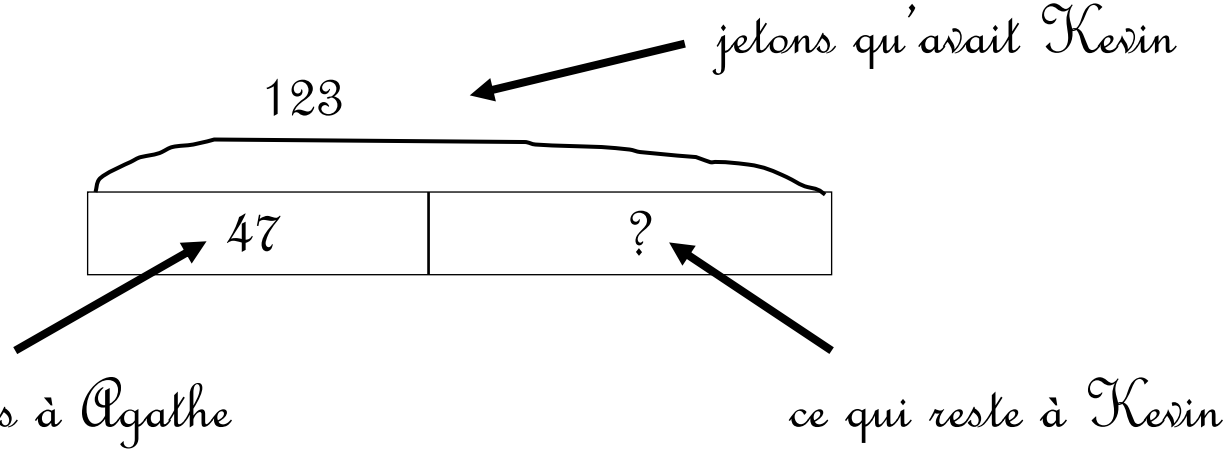


- Mise en commun des procédures
- Synthèse : Affiche de référence avec recensement des procédures possibles → Structuration des connaissances + hiérarchisation des procédures

Kevin avait 27 jetons ; il en a donné 12 à Agathe.
Combien de jetons a Kevin maintenant ?



(27 ; 12) → (123 ; 47)



Construire des institutionnalisations pour avoir des références, des modèles sur lesquels s'appuyer

- des affichages, en nombre limité mais bien choisis, en s'appuyant notamment sur les différents types de schémas présentés à la classe ;

- des traces écrites dans les cahiers,
  - Quels cahiers pour la résolution de problèmes ?

    Pour la résolution « quotidienne » de problèmes (éviter l'utilisation systématique de l'ardoise ou de feuille volantes), pour les traces écrites de référence (modèles de résolution).

Et la manipulation ?

Les élèves ne doivent pas pouvoir résoudre le problème uniquement en manipulant le matériel. En revanche, sa présence peut les aider à se représenter le problème et, à la fin, permettre une vérification pratique de la solution. Il faut en effet veiller à ce que les élèves comprennent la situation et ce qu'il faut chercher =pour qu'ils se sentent personnellement engagés pour relever le défi qui leur est lancé.

On pense souvent à la manipulation en mathématiques comme à un moyen presque magique pour provoquer la motivation des élèves et rendre « agréable » une discipline qui serait indigeste. Il me paraît important de prendre un minimum de distance avec cet a priori. En effet si la manipulation n'est pas sévèrement encadrée, il en résulte souvent la disparition des mathématiques :

La manipulation des collections risque par exemple de transformer un problème arithmétique en un problème pratique que l'on va résoudre en manipulant les objets des collections et en évacuant ainsi tout recours au nombre.

De même il faut veiller à ne pas transformer, sous prétexte de manipulation, un problème de géométrie en problème de dessin…

La manipulation en mathématiques n'aura d'intérêt que dans la mesure où elle n'occulte pas le problème mathématique ; la manipulation ne rendra pas les mathématiques concrètes ! Les mathématiques travaillent sur des entités abstraites (nombres, figures géométriques, …) qui peuvent servir à une modélisation du réel, mais ne saurait s'y substituer. Donc on pourrait dire que, pour que la manipulation apporte quelque chose en mathématiques, il faut à un moment ou à un autre que celle-ci soit empêchée ; ce sera la condition du passage à la représentation, de l'anticipation, du passage des objets physiques aux objets géométriques, …

La manipulation peut se justifier à deux moments du processus d'apprentissage :

Au début, afin de faciliter la représentation du problème par les élèves.

A la fin, un retour au matériel peut être pertinent pour valider des solutions construites par les élèves dans un cadre mathématique.

Entre les deux, des contraintes doivent intervenir pour empêcher la manipulation et obliger les élèves à changer de registre et à résoudre un problème mathématiques et non un problème matériel.

La manipulation est une aide pour les élèves qui seraient en difficulté au niveau de la représentation du problème ; des contraintes bien choisies viennent empêcher la résolution pratique du problème par les élèves et les oblige à passer par la résolution du problème mathématique, mais l'existence potentielle de la résolution pratique favorise la représentation par les élèves de ce que signifie « résoudre le problème ».

Une fois le problème mathématique résolu, on peut réaliser matériellement la solution trouvée (retour à la manipulation) et confronter avec la solution donnée par la résolution pratique : validation.

La référence à la résolution pratique, via les moments de manipulation a donc une double fonction :

facilitation de la représentation du problème pratique par un problème mathématique ;

auto-validation des solutions obtenues lors de la résolution du problème mathématique.

Organiser une progression cohérente sur les deux cycles

- Un travail d'équipe
  - Cohérence entre une année et la suivante concernant le type de problèmes proposés : partie-tout/comparaison, nombre d'étapes, nombres en jeu, type d'opérations en jeu (addition, soustraction, etc.), niveau des opérations en jeu (avec ou sans retenue, tables utilisées)
  - Harmonisation au sein de l'école ou du réseau concernant les schémas utilisés en classe dans les institutionnalisations et les mises en commun

- Quand et combien ?
  - des séances spécifiques (sur la numération, sur une opération donnée, etc.) où l'on résout plusieurs problèmes ;
  - des problèmes isolés dans une séance où d'autres types de tâches sont proposés ;
  - toutes les semaines.

- Bien calibrer le niveau de difficulté des problèmes proposés aux élèves (chercher, un peu, et trouver).
  - Gestion de classe
  - Plaisir de faire des mathématiques

- Privilégier l'accompagnement des élèves pendant le temps de recherche individuelle à une longue présentation collective du problème en début de séance.

conclusion

① **S'assurer que les élèves résolvent des problèmes fréquemment (quotidiennement ou presque)**

- Il est souhaitable de tendre vers une dizaine de problèmes résolus chaque semaine

② **S'assurer que les élèves résolvent des problèmes variés**

- Il faut sortir régulièrement du « 2 nombres » + « Combien ? », tout en privilégiant les problèmes élémentaires en une ou plusieurs étapes

③ **Être vigilant quant au contexte des énoncés, au vocabulaire et à la difficulté mathématique des problèmes proposés**

- la résolution de problèmes doit être source de plaisir

④ **Veiller à ce qu'une différenciation soit bien mise en œuvre pendant les temps de résolution de problèmes**

- En particulier par l'accompagnement pendant les temps de recherche (conseils individuels, prise en charge d'un petit groupe)

- En proposant des énoncés différents si cela est absolument nécessaire tout en essayant de garder des tâches communes pour maintenir des temps collectifs pour le groupe classe

⑤ **S'assurer que les élèves disposent de temps de recherche conséquents**

- Équilibre entre le temps de parole de l'enseignant, les temps collectifs et le temps de recherche individuelle

⑥ **Veiller à ce que la compétence « représenter » fasse l'objet d'un enseignement construit**

- Proposer, sans contraindre, des schémas porteurs de sens utilisés de façon récurrente tout au long du cycle

⑦ **Encourager les échanges inter-élèves**

- Pendant les temps de recherche, en binôme ou en petit groupe après un temps individuel, ou pendant les temps de mise en commun avec toute la classe